Mitschrift Elektrotechnik II

Peter Turczak

3. Mai 2006

Inhaltsverzeichnis

Vektorrechnung **iii**
0.1 Dreidimensionaler Vektor iii
0.2 Skalarprodukt iii
0.3 Vektorprodukt iii

1 Das langsam veränderliche elektrische Feld **1**
1.1 Qasistationäre Felder 1
1.2 Kondensator an Zeitabhängiger Spannung 1
1.2.1 Bereich $0 \leq t < 10ms$ 2
1.2.2 Bereich $10 \leq t < 15ms$ 3
1.2.3 Bereich $15 \leq t < 25ms$ 3
1.3 Der Verschiebungsstrom 3
1.3.1 Definition des Verschiebungsstroms 3
1.3.2 Der Knotensatz bei zeitabhängigen Strömen 4
1.3.3 Das Durchflutungsgesetz bei zeitabhängigen Strömen . . . 4
1.3.4 Ströme in realen Isolierstoffen 5
1.4 Auf- und Entladung eines Kondensators 5
1.5 Leistung und Energie eines Kondensators 6

2 Das statische Magnetfeld **9**
2.1 Allgemein 9
2.2 Kräftewirkung im Magnetfeld 9
2.2.1 Kraft auf einem stromdurchflossenen Leiter 9
2.2.2 Kraft auf eine bewegte Ladung im Magnetfeld 10
2.3 Hall-Effekt 10
2.4 Magnetische Flussdichte und magnetische Feldstärke 11
2.5 Magnetischer Fluss 12
2.6 Durchflutungsgesetz 12
2.7 Anwendung des Durchflutungsgesetzes auf technische Anwendungen 13
2.7.1 Magnetfeld eines langen, geraden Leiters 13
2.7.2 Magnetfeld einer Koaxialleitung 13
2.7.3 Magnetfeld innerhalb einer Kreisringspule 15
2.7.4 Das Magnetfeld innerhalb einer Zylinderspule 15

2.8 Das Gesetz von Biot-Savart 16
2.8.1 Magnetfeld eines endliche langen Leiters 16
2.8.2 Magnetfeld im Mittelpunkt einer kreisförmigen Leiterschleife 16
2.9 Materie im Magnetfeld 17
2.9.1 Magnetismus und elementarer Aufbau 17
2.9.2 Diamagentismus 17
2.9.3 Paramagnetismus 17
2.9.4 Ferromagnetismus 17
2.10 Energiedichte im Magnetfeld 19
2.11 Der magnetische Kreis 19
2.11.1 Magnetischer Kreis und magnetische Ersatzschaltung . . . 19
2.11.2 Feldgrößen an Grenzflächen 21
2.11.3 Kräfte auf der Trennfläche 22
2.11.4 Anwendungen 22

3 Zeitabhängige magentische Felder 23
3.1 Indunktionsgesetz und LENTZsche Regel 23
3.2 Selbstinduzierte Spannung 24
3.3 Bewegungsspannung 24
3.4 Erzeugung einer Sinusspannung 25
3.5 Selbstinduktivität 26
3.6 Induktivität von praktischen Anwendungen 27
3.7 Zusammenschaltung von Induktivitäten 28
3.8 Gegeninduktion und Gegeninduktivität 28

4 Dreh- und Wechselstromtechnik 31
4.1 Komplexe Zahlen 31

Vektorrechnung

0.1 Dreidimensionaler Vektor

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_x \cdot \vec{e_x} + a_y \cot \vec{e_y} + a_z \cdot \vec{e_z} & (1) \\ &= (a_x, a_y, a_z) & (2) \end{aligned}$$

Hierbei werden $\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}$ als Einheitsvektoren bezeichnet.

0.2 Skalarprodukt

$$\begin{aligned} c &= \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\phi & (3) \\ &= a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z & (4) \end{aligned}$$

Wobei ϕ den spitzen Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit $0^o \leq \phi \leq 180^o$ bezeichnet.

0.3 Vektorprodukt

$$\begin{aligned} \vec{c} &= \vec{a} \times \vec{b} & (5) \\ &= \left(a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y, a_z \dot{b}_x - a_x \cdot bz, a_x \cdot b_y\right) & (6) \\ |\vec{c}| &= |\vec{a}| \times \left|\vec{b}\right| = |\vec{a}| \cdot \sin\phi & (7) \end{aligned}$$

Das Vektorprodukt oder Kreuzprodukt ist nur im 3-dimensionalen Raum definiert. $\vec{c}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und auf $\vec{b}$ und somit auf der durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ definierten Ebene. Die Richtung von $\vec{c}$ ist durch die folgende Regel gegeben.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

Kapitel 1

Das langsam veränderliche elektrische Feld

1.1 Qasistationäre Felder

Unterscheidung:

1. Stationäre Vorgänge:
   Die physikalischen Größen sind zeitlich konstant.

2. Zeitabhängige Vorgänge:

   (a) Zeitlich langsam (Quasistationär):
   der Einfluss der räumlichen Ausdehnungsgeschwindigkeit sämtlicher Größen ist vernachlässigbar. In diesem Fall können für jede Berechnung konzentrierte Bauelemente verwendet werden. Dies ist der Fall, wenn die Verzögerungszeit δt sehr viel kleiner ist, als die kleinste Periodendauer T eines Stroms oder Spannung ist.

   (b) Sehr schnelle Änderungen:
   Anwendung der vollständigen Maxwell'schen Gleichungen (DGL) und der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Ströme und Spannungen.

1.2 Kondensator an Zeitabhängiger Spannung

Bezugspfeilsystem an C: Verbraucherzählsystem (VZS). Zu jeder Zeit gilt

$$Q(t) = C \cdot u_c(t) \tag{1.1}$$

Mit $Q =$ Ladung des Kondensators.

Eine kleine Spannungsänderung du_c bewirkt eine proportionale Ladungsänderung dQ:

$$dQ = C \cdot du_c \tag{1.2}$$

Diese Ladungsänderung erfolgt durch den Stromfluss innerhalb der Zeit dt:

$$i_c = \frac{dQ}{dt} \tag{1.3}$$

Mit (1.2) $\rightarrow$ (1.3):

$$i_c = C \cdot \frac{du_c}{dt} \tag{1.4}$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, dass sich die Spannung an einer Kapazität nicht sprunghaft ändern kann, da sonst der Strom unendlich groß werden würde. Die Stromstärke ist proportional zur Geschwindigkeit der Spannungsanderung. Durch Umformen und Integrieren erhält man aus Gleichung (1.4):

$$du_c = \frac{1}{C} \cdot i_c dt \mapsto a_c = \frac{1}{C} \int i_c dt + u_0{}^1 \tag{1.5}$$

Übung

An einer Kapazität $C = 0,2\mu F$ liegt die abgebildete zeitabhängige Spannung u_c. Berechnen und zeichnen Sie die zugehörige Zeitfunktion des Stromes i im Zeitintervall $0 \leq t \leq 30ms$.

$$i_c = C \cdot \frac{du_c}{dt}$$

Da es sich um lineare Kurvenabschnitte handelt, gilt:

$$i_c = C \cdot \frac{du_c}{dt} = C \cdot \frac{u_{c_1} - u_{c_2}}{t_2 - t_1}$$

1.2.1 Bereich $0 \leq t < 10ms$

$$\begin{aligned} i_c &= 0,2 \cdot 10^-6F \cdot \frac{5V - 0V}{10ms - 0ms} \\ &= 0,2 \cdot \frac{5}{10} \cdot 10^{-3} \\ &= 1 \cdot 10^{-4} A \end{aligned}$$

1.2.2 Bereich $10 \leq t < 15ms$

$$i_c = 0,2 \cdot \frac{5V - 5V}{15ms - 10ms} = 0$$

1.2.3 Bereich $15 \leq t < 25ms$

$$\begin{aligned} i_c &= 0,2 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{0V - 5V}{15ms - 25ms} \\ &= 0,2 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{-5V}{-10ms} \end{aligned}$$

Übung 1-2

Mittels 1.5:

$$\begin{aligned} u_c &= \frac{1}{C} \int i_c \mathrm{dt} + U_o \\ &= \frac{1}{10 \cdot 10^{-9} F} \int \left(-40 \cdot 10^{-6} A \cdot e^{-\frac{t}{2,5ms}} \right) \mathrm{dt} + U_o \end{aligned}$$

1.3 Der Verschiebungsstrom

1.3.1 Definition des Verschiebungsstroms

Annahme: Idealer Plattenkondensator gemäß Bild 1-2. Es gilt für die Ladung

$$Q = \vec{D} \cdot \vec{A}$$

$D = \frac{Q}{A}$ $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d\vec{D}}{dt} \cdot \vec{A} \qquad (1.6)$$

Die Größe $\frac{d\vec{D}}{dt}$ hat die Einheit einer Stromdichte und deshalb definiert man:

$$\frac{d\vec{D}}{dt} = \vec{s_v} \qquad (1.7)$$

$$\frac{d\vec{D}}{dt} = \epsilon \cdot \frac{d\vec{E}}{dt} = \vec{s_v} \qquad (1.8)$$

Die Verschiebungsstromdichte, bzw. der Verschiebungsstrom existiert immer dann, wenn sich im Raum die Feldstärke ändert.

Verschiebungsstrom:

$$i_v = \int_A \vec{s_v} \cdot d\vec{A} \tag{1.9}$$

Der Leitungsstrom im Leiter des Bildes 1-2 setzt sich im Dielektrikum als Verschiebungsstrom fort.

1.3.2 Der Knotensatz bei zeitabhängigen Strömen

Für den idealen Plattenkondensator gemäß Bild 1-3 ist die Hüllfläche A mit ihren ihren Teilflächen A_1 und A_2 dargestellt.

Der Knotensatz lautet bei zeitunabhängigen Strömen:

$$i_l = i_v \tag{1.10}$$

Im Allgemeinen gilt: Die Summe der Leitungs und Verschiebungsströme in einem Knoten ist 0.

$$\sum_{m=1..M,n=1..N} i_{l_m} + i_{v_n} \tag{1.11}$$

Mithilfe der Stromdichte lautet der Knotensatz:

$$\oint_A \left(\vec{S_l} + \vec{S_v}\right) \cdot \vec{A} = 0 \tag{1.12}$$

1.3.3 Das Durchflutungsgesetz bei zeitabhängigen Strömen

Jeder Strom erzeugt ein Magnetfeld, d.h. sowohl der Leitungsstrom als auch der Verschiebungsstrom erzeugen ein Magnetfeld nach folgendem Durchflutungsgesetz:

$$\oint \vec{H} \cdot ds = i_l \tag{1.13}$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = i_v \tag{1.14}$$

H : Magnetische Feldstärke

$d\vec{s}$: Wegelement

In allgemeiner Form lautet das Durchflutungsgesetz mithilfe der Stromdichten (1. Maxwellsche'sche Gleichung).

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_A \vec{S_l} \cdot d\vec{A} + \int_A \vec{s_v} \cdot d\vec{A} \tag{1.15}$$

1.3.4 Ströme in realen Isolierstoffen

Wir betrachten einen Plattenkondensator mit einem reellen Dielektrikum (Bild 1-5). Das Dielektrikum[2] hat eine endliche Leitfähigkeit σ und somit setzt sich die gesamte Stromdichte $\vec{s}$ aus folgenden Anteilen zusammen:

$$\vec{s} = \underbrace{\sigma \cdot \vec{E}}_{\text{Leitungsstromdichte}} + \underbrace{\epsilon \cdot \frac{d\vec{E}}{dt}}_{\text{Verschiebungsdichte}} \tag{1.16}$$

ϵ: Dielektrizitätskonstante
σ: Elektrische Leitfähigkeit

Übung 1-4

1.4 Auf- und Entladung eines Kondensators

Ein Kondensator gemäß Bild 1-6 liegt seit langer Zeit an der Spannungsquelle U_A und nimmt daher ihre Spannung an : $U_C(t < 0) = U_A$. Zur Zeit $t = 0$ wird der Schalter von 1 nach 2 umgelegt und der Kondensator lädt sich auf die neue Spannung U_E um. $U_C(t \to \infty) = U_E$.

Maschengleichung für $t \geq 0$:

$$R_e \cdot i_C + U_C = U_E \tag{1.17}$$

Gleichung 1-4 eingesetzt:

$$\underbrace{R_E \cdot C\frac{du_c}{dt} + U_C}_{\text{DGL 1. Ordnung}} = U_E \tag{1.18}$$

Für $t \to \infty$ gilt

$$\frac{du_c}{dt_c} = 0 \tag{1.19}$$

Zeitkonstante des Ladevorgangs:

$$\tau = R_E \cdot C \tag{1.20}$$

$$\tau \cdot \frac{du_c}{d_t} + U_C = U_E \tag{1.21}$$

Allgemeine Lösung:

$$U_C = U_E - K \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{1.22}$$

[2]=Isoliermittel

K wird mithilfe der Ausgangsbedingung ($t = 0$) bestimmt:

$$\begin{aligned} U_C(0) &= U_A = U_E - K \cdot 1 && (1.23)\\ K &= U_E - U_A && (1.24)\\ \text{Lösung: } U_C &= U_E + (U_A - U_E) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} && (1.25) \end{aligned}$$

$$I_C || U_C \to I_C = +C\frac{du_c}{dt}$$

Mit (1-26) und (1-4) erhält man I_C :

$$i_c = -\frac{U_A}{U_E} R_E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (1.26)$$

Sonderfälle:

- Ungeladener Kondensator wir aufgeladen ($U_A = 0$):

$$\begin{aligned} U_C &= U_E \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) && (1.27)\\ I_C &= \frac{U_E}{R_E} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} && (1.28)\\ I_{C_{max}} &= I_C(t=0) = \frac{U_E}{R_E} && (1.29) \end{aligned}$$

  Eine ungeladene Kapazität wirkt im Schaltzeitpunkt wie ein Kurzschluss.

- Entladung eines Kondensators ($U_E = 0; U_A \neq 0$):

$$\begin{aligned} U_C &= U_A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} && (1.30)\\ I_C &= \frac{U_A}{R_E} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} && (1.31) \end{aligned}$$

1.5 Leistung und Energie eines Kondensators

Nach Bild 1-1 gilt für die Leistung die ein Kondensator aufnimmt:

$$P = U_C \cdot I_C = U_C \cdot C \cdot \frac{du_c}{dt} \qquad (1.32)$$

Annahme: Ein Kondensator wird in einer Zeit von $t = 0$ bis t_e von einer Spannung $U = 0$ bis U_E aufgeladen. Die die dafür benötigte Energie beträgt:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{t_e} P \cdot dt = \int_0^{t_e} \cdot C \cdot \frac{du_c}{dt} \cdot dt\\ &= \int_0^{U_e} U_C \dot{d}u_c \cdot C = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_e^2 && (1.33) \end{aligned}$$

Mit Gleichung 1-1 gilt auch:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_e^2}{C} \tag{1.34}$$

Für die Energiedichte im Dielektrikum eines Kondensators gilt:

$$w = \int_0^{E_e} D \cdot dE = \int_0^{E_e} \epsilon \cdot E = \frac{1}{2}\epsilon E_e^2 = \frac{1}{2}\frac{D_e^2}{E} \tag{1.35}$$

[3]

Hier Annahme : $\epsilon =$ Konstant und $\vec{E}||\vec{D}$
Allgemein gilt:

$$w = \frac{1}{2}\vec{E} \cdot \vec{D} \tag{1.36}$$

Die gesamte Energie eines Raumes erhält man, durch Integration über den gesamten Raum:

$$W = \int_V w \cdot dV \tag{1.37}$$

Übung 1-5

Übung 1-8

Lösungsansatz: Einfache Schaltungen wie 1-8 versucht man auf die allgemeine Lösung für Bild 1-6 zurückzuführen. d.h.:

1. U_A bestimmen.
2. U_E bestimmen.
3. Alle Spannungsquellen kurzschließen und alle Stromquellen leerlaufen lassen[4].
4. Formel ansetzen:

$$u_c = U_E + (U_A - U_E) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

[3]Nun folgt eine Nummerierungslücke, wahrscheinlich muss setcounter durchgeführt werden...
[4]Entfernen

Im Stationären Zustand vor dem Umschalten ist der Kondensator auf U_A aufgeladen.

$$i_1 = i_c = 0$$

Unmittelbar nach dem Umschalten hat der Kondensator die Spannung

$$U(t=0) \quad = \quad U_A = U_B$$

Im stationären Zustand nach dem Umschalten gilt:

$$i_c \quad = \quad 0$$

und folgende vereinfachte Schaltung:

$$\begin{aligned} u_3 &= \frac{R_3}{R_{12}+R_3} \cdot U_B = 100V \\ R_1||R_2||R_3 &= \frac{1}{\frac{1}{1.2k\Omega}+\frac{1}{2k\Omega}+\frac{1}{500\Omega}} = 300\Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau &= R_{ges} \cdot C \\ &= 300\Omega \cdot 10^{-6}F = 3 \cdot 10^-4s \\ u_1 &= U_E + (U_A - U_E) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= (100V + 450V) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \\ i_3 &= \frac{u_c}{R3} = \frac{(100V+150V) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}{500\Omega} = 0.2A + 0.3A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned}$$

Bei $t < 0$ gilt: $\frac{U_B}{R_1+R_2} = \frac{250V}{2500\Omega}$

$$\begin{aligned} i_3\,(t=0) &= 0.2A + 0.3A = 0.5A \\ i_3\,(t \to \infty) &= 0.2A + 0A \end{aligned}$$

Kapitel 2

Das statische Magnetfeld

2.1 Allgemein

Natürliche Magnetfelder wie z.B. Magneteit (Fe_3O_4) üben Anziehungskräfte auf Eisenteile aus. Ein Magnet besitzt ein Magnetfeld. Magnetfelder sind Wirbelfelder, d.h. die Feldlinien sind immer in sich geschlossen. Magnetfelder sind immer das Produkt eines Stromes; bei Dauermagneten ist die Ursache ein atomarer Strom (Elektronenfluss und Elektronenspin). Der Zusammenhang zwischen der Richtung eines Stromes und eines magnetischen Feldes ist durch die Regeln im Bild 2-4 gegeben.

2.2 Kräftewirkung im Magnetfeld

2.2.1 Kraft auf einem stromdurchflossenen Leiter

Auf einem stromdurchflossenen Leiter im Magnetfeld gemäß Bild 2-5 wird folgende Kraft ausgeübt.

$$F = B \cdot I \cdot l \cdot \sin\alpha \tag{2.1}$$

B: Magnetisches Flußdichte oder magnetische Induktion
Für $\alpha = 90^o$ ergibt sich die definition und die Einheit in

$$B = \frac{F}{I \cdot l} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} [B] &= 1\frac{N}{A \cdot M} \\ &= 1\text{Tesla} = 1T \end{aligned} \tag{2.3}$$

Älterer Einheit: Gauss

$$1G = 10^{-4}T \tag{2.4}$$

HIER FEHLT ETWAS!
Allgmeine Formel der Kraft:

$$\vec{F} = I \cdot \left(\vec{l} \times \vec{B}\right) \tag{2.5}$$

Merkregel: 3-Finger Regel (Bild 2-6)

Daumen	$\hat{=}$	Leiter (Strom)	$\vec{l}\,(I)$
Zeigefinger	$\hat{=}$	Magnetfeld	$\vec{B}$
Mittelfinger	$\hat{=}$	Kraft	$\vec{F}$

2.2.2 Kraft auf eine bewegte Ladung im Magnetfeld

Die Kraft, die auf einen stromdurchflossenen Leiter im Magnetfeld, kommt durch die Bewegung von Ladung zu Stande. Ersetzt man die Stromstärke durch die Ladungsmengen und Ladungsgeschwindigkeit, so erhält man die folgende Beziehung:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= Q \cdot \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \qquad (2.6)\\ Q &: \text{Ladung}\\ \vec{v} &: \text{Geschwindigkeit der Ladungen}\\ \vec{F} &: \text{Die so genannte Lorentzkraft} \end{aligned}$$

Annahme: $\vec{v}$ und $\vec{B}$ sind konstant im betrachteten Bereich.

2.3 Hall-Effekt

Eine leitende Platte (Metall oder Halbleiter) befindet sich in einem Magnetfeld mit der senkrechten Komponente $\vec{B_n}$. Ein weiterer Strom I entspricht einer bestimmten Geschwindigkeit $\vec{v}$ negativer Ladungen. Auf diese Ladungen wirkt die Lorentzkraft $\vec{F_L}$. Durch die Anhäufung der Ladungen auf der rechten Seite entsteht ein Elektronenmangel auf der linken Seite. Das so verursachte elektrische Feld erzeugt eine Kraft $\vec{F}$ entgegengesetzt zu $\vec{F_L}$.

$$\begin{aligned} \vec{F_E} &= -e \cdot \vec{E}\\ \vec{F_E} &= -e \cdot \vec{v} \times \left(\vec{B_n}\right) \Rightarrow \qquad (2.7)\\ |\vec{F_L}| &= e \cdot v \cdot B_n\\ e &: \text{Hier: Die elementarladungskonstante} \qquad (2.8) \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} I &= e \cdot n \cdot A \cdot v \qquad (2.9)\\ n &: \text{Anzahl der Ladungen pro Volumeneinheit}\\ A &: \text{Leitungsquerschnitt} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|\vec{F_L}| &= |\vec{F_E}| \Rightarrow \\
E &= \frac{1}{e \cdot n} \cdot \frac{I}{A} \cdot B_n (\text{Im Gleichgewichtszustand}) \qquad (2.10)
\end{aligned}
$$

Die Leerlauf-Hallspannung beträgt:

$$
\begin{aligned}
U_{H0} &= E \cdot b \qquad (2.11) \\
U_{H0} &= \frac{1}{e \cdot n} \cdot \frac{I \cdot B_n}{d} \\
&= R_H \cdot \frac{I \cdot B_n}{d} \qquad (2.12) \\
R_H &: \text{Hallkonstante (Materialkonstante)}
\end{aligned}
$$

Da die gesamte Polspannung umgekehrt proportional zur Ladungsdichte ist, bevorzugt man Halbleiter gegenüber Metallen bei Hallsonden. Anwendungen:

- Magnetfeldmessung
- Elektrischer Multiplizierer, z.B. zur Leistungsberechnung: $s = U \cdot I$
- Kontaktlose Signalgabe, z.B. für Annäherungsschalter und Drehzahlmesser.

2.4 Magnetische Flussdichte und magnetische Feldstärke

Das Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters hängt vom Strom ab (einschließlich der Leitergeometrie) und vom magnetischen Verhalten des Materials um den Leiter herum. Zur vereinfachten Berechnung des Magnetfeldes führt man eine materialabhängige Größe ein: $\vec{H}$, die magnetische Feldstärke. Die materialabhängige und physikalisch interessante Größe ist $\vec{B}$, die magnetische Induktion oder magnetische Flussdichte. Der Zusammenhang zwischen diesen beiden Größen ist durch die Materialeigenschaft gegeben:

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \qquad (2.13)$$

Wobei μ im Allgemeinen von der magnetischen Feldstärke H abhängig ist. Es wird definiert:

$$
\begin{aligned}
\mu &= \mu_r \cdot \mu_0 \qquad (2.14) \\
\mu_0 &= 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{V \cdot s}{A \cdot m} \qquad (2.15) \\
&\approx 1,257 \cdot 10^{-6} fracV \cdot sA \cdot m \\
\mu &: \text{Permeabilität (eines Materials)} \\
\mu_0 &: \text{Magnetische Feldkonstate} \\
\mu_r &: \text{Permiabilitätszahl}
\end{aligned}
$$

Für Vakuum gilt: $\mu_r = 1$, für Luft gilt: $\mu_r \approx 1$

2.5 Magnetischer Fluss

Der Fluss des Vektors $\vec{B}$ wird als magnetischer Fluss bezeichnet ϕ.

$$\phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \tag{2.16}$$

ϕ gibt die Gesamtheit des magnetischen Feldes an, welches durch eine Fläche A hindurchgeht. Die Einheit von ϕ ist :

$$\begin{aligned} [\phi] &= 1\frac{V \cdot s}{m^2} \cdot m^2 \\ &= 1V \cdot s = 1\text{Weber} = 1Wb \end{aligned} \tag{2.17}$$

Für ein homogenes Feld $\vec{B}$ welches schräg durch eine Fläche A hindurchgeht gilt:

$$\begin{aligned} \phi &= \vec{B} \cdot \vec{A} \\ &= A \cdot B \cdot \cos\angle\left(\vec{B}, \vec{A}\right) \end{aligned} \tag{2.18}$$

Bild 2-10 b). Steht $\vec{B}$ senkrecht auf einer Fläche A so gilt:

$$\phi = \vec{B} \cdot \vec{A} = B \cdot A \cdot \cos 0^o = B \cdot A \tag{2.19}$$

Fall 2-10 a).

Da die Magnetfeldlinien immer in sich geschlossen sind, folgt daraus: Feldlinien der Flussdichte, die in die geschlossene Hüllfläche eines Volumengebietes eintreten, kommen an anderer Stelle wieder heraus:

$$\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \tag{2.20}$$

2.6 Durchflutungsgesetz

Wir betrachten einen beliebig gekrümmten Leiter mit der Stromstärke I und bilden das Umlaufintegral der magnetischen Feldstärke entlang eines beliebigen Weges. Dabei stelle man fest:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = I = \theta \tag{2.21}$$

θ : Durchflutung

I : Vom Umlaufweg umschlossene Strom

Werden mehrere Leiter vom Umlaufweg umschlossen, so gilt:

$$\oint \vec{H} d \cdot d\vec{s} = \sum_{k=1}^{n} I_k = \theta \tag{2.22}$$

Für (2-11) und (2-22) gilt: Die mit dem Integrationsweg im Sinne einer Rechtsschraube verknüpften Ströme erhalten ein positives Vorzeichen, die anderen ein negatives Vorzeichen. H ist ist Summe aller umschlossenen Ströme.

2.7 Anwendung des Durchflutungsgesetzes auf technische Anwendungen

2.7.1 Magnetfeld eines langen, geraden Leiters

Es wird ein unendlich langer, gerader und zylindrischer Leiter betrachtet. Aus Symmetriegründen folgt:

1. Die Magnetfeldlinien sind konzentrische Kreise um die Leiterachse.
2. Der Betrag der magnetischen Feldstärke H ist auf einem solchen Kreis konstant.
3. Die Richtung des Feldes ist tangential zu diesem Kreis

2.7.2 Magnetfeld einer Koaxialleitung

Innerhalb des Leiters

$$\begin{aligned}
\oint \vec{H}_i \cdot d\vec{s} &= \oint H_i \cdot d_s \cdot \underbrace{\cos\angle\left(\vec{H}_i, d\vec{s}\right)}_{=1}(\text{Da der Winkel } 0^o) \\
\Rightarrow \oint H_i \cdot ds &= H_i \cdot \oint ds \\
&= H_i \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \\
\int_A \vec{s} \cdot d\vec{A} &= \int_A s \cdot dA \cdot \cos 0^o
\end{aligned}$$

Unter der Annahme s sei über den Leiter konstant (nur bei Gleichstrom!).

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad &= \int_A S \cdot dA = s \cdot \int_A dA = S \cdot A(r) \\
&= \int I(r_a)^2 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \pi \\
A \quad &: \quad \text{die gesamte, umschlossene Fläche} \\
S \quad &: \quad \frac{\text{Gesamtstrom}}{\text{Gesamtfläche}}
\end{aligned}$$

Beide Gleichungen gleichsetzen:

$$
\begin{aligned}
H_i \cdot 2 \cdot \pi \cdot r &= \underbrace{\frac{I}{\pi \cdot r_a^2}}_{\hat{=} s} \cdot \pi \cdot r^2 \\
H_i &= \frac{I}{r_a^2 \cdot \pi} \cdot \frac{r}{2} (\text{Gerade}) \qquad (2.23)
\end{aligned}
$$

Außerhalb des Leiters

$$
\oint \vec{H}_a \cdot d\vec{s} = H_a \dot{2} \cdot \pi \cdot r = I
$$

Außerhalb des Leiters „sieht" bzw. umschließt man I.

$$
H_a = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r} \qquad (2.24)
$$

Treffen sich die Funktionen bei $r = r_a$?

$$
\begin{aligned}
H_i\,(r = r_a) &= \frac{I \cdot r_a}{2 \cdot \pi \cdot r_a^2} = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r_a} \\
H_a\,(r = r_a) &= \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r_a}
\end{aligned}
$$

Also springt die Feldstärke am Übergang Leiter-Luft nicht!

Es wird ein Koaxialkabel mit einer gleichmäßigen Stromverteilung angenommen. Der Innenleiter stellt den Hin-Leiter und der Außenleiter den Rückleiter für den Strom I dar.

$$
\begin{aligned}
\text{Im Innenleiter: } H &= \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r_1^2} \qquad (2.25) \\
\text{Im Zwischenraum: } H &= \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r} \qquad (2.26) \\
\text{Im Außenleiter: } H &= \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r^2} \cdot \frac{r_3^2 - r^2}{r_3^2 - r_2^2} \qquad (2.27) \\
\text{Im Außenraum: } H &= 0 \qquad (2.28)
\end{aligned}
$$

2.7.3 Magnetfeld innerhalb einer Kreisringspule

Annahme: Die Spule ist dicht gewickelt und es gilt:

$$\begin{aligned} D &>> d \\ D &: \text{Durchmesser der Spule} \\ d &: \text{Windungsdurchmesser} \end{aligned}$$

Unter dieser Voraussetzung kann man näherungsweise von einem kreisförmigen Magnetfeld ausgehen:

$$\begin{aligned} \oint \vec{H} \cdot d\vec{s} &= \oint H \cdot ds \cdot \underbrace{\cos \angle \left(\overbrace{\vec{H}, ds}^{0^o} \right)}_{1} \\ \oint H \cdot ds &= H \cdot \oint ds = H \cdot s = H \cdot 2 \cdot \pi \cdot r = N \cdot I = \theta \end{aligned} \tag{2.29}$$

Allgemein gilt:

$$H = \frac{N \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot r} \tag{2.30}$$

Näherung: Falls $D >> d$, dann kann man von einem näherungsweise konstanten Feld ausgehen im gesamten Spannungsbereich:

$$H \approx \frac{N \cdot I}{\pi \cdot D} \tag{2.31}$$

2.7.4 Das Magnetfeld innerhalb einer Zylinderspule

Annahme: Die Länge der Spule ist wesentlich größer als ihr Durchmesser und sie ist dicht gewickelt. Es wird vorausgesetzt, dass das Feld im inneren der Spule homogen und viel stärker als im Außenraum ist.

$$\begin{aligned} \oint \vec{H} ds &= \int_{l_i} \vec{H}_i + \underbrace{\int_{l_a} \vec{H}_a \cdot d\vec{s}}_{\approx 0} \\ &= \int_{l_i} H_i \cdot d_s \cdot \underbrace{\cos \angle \left(\vec{H}_i, d\vec{s} \right)}_{1} = H \\ &= H_i \cdot \int ds \\ &= H \cdot I \end{aligned} \tag{2.32}$$

$$H_i = H = \frac{N \cdot I}{l} \tag{2.33}$$

2.8 Das Gesetz von Biot-Savart

Das Durchflutungsgesetz lässt sich nur für einfache, symmetrische Anodnungen erfolgreich einsetzen. Bei komplizierteren Anordnungen kann man das Biot-Savart Gesetz anwenden. (Siehe Bild 2-21) Für einen unendlich dünnen Leiter lautet das Biot-Savart Gesetz:

$$\vec{B} = \frac{\mu \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \int \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \tag{2.34}$$

bzw.

$$\begin{aligned} d\vec{B} &= \frac{\mu \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \\ r &: \text{Aufpunkt} \\ \vec{r} &: \text{Längenvektor, gerichtet von } d\vec{l} \text{ zu } P \end{aligned} \tag{2.35}$$

$d\vec{B}$ ermittelt man mithilfe der 3-Finger Regel: $d\vec{B}$ stet senkrecht auf der Fläche, die von $d\vec{l}$ und $\vec{r}$ aufgespannt wird.

2.8.1 Magnetfeld eines endliche langen Leiters

Mithilfe des Biot-Savart Gesetzes lässt sich das Magnetfeld eines beliebig langen, geraden und unendlich langen Leites berechnen:

$$B = \frac{\mu \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot d} \cdot (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \tag{2.36}$$

2.8.2 Magnetfeld im Mittelpunkt einer kreisförmigen Leiterschleife

Annahme: Dünne, kreisförmige Leiterschleife. Die Magnetfelder der Zuleitungen heben sich gegenseitig auf, wenn die Leiter sehr eng beieinander liegen.

Auf dem gesamten Integrationsweg gilt:

$$\begin{aligned} \alpha = 90^o &\Rightarrow \sin \alpha = 1 \\ r &= \text{const} \\ \vec{B} &= \frac{\mu \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \int_l \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \end{aligned}$$

Alle $d\vec{B}$ sind parallel, da $d\vec{l} \times \vec{r}$ immer eine Richtung $\rightarrow$ Man kann algebraisch addieren:

$$B = \frac{\mu \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \int_l \frac{dl \cdot r \cdot \overbrace{\sin \alpha}^{=1}}{r^3}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\mu \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \int_l dl \\ &= \frac{\mu \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{r^2} = \frac{\mu \cdot I}{2 \cdot r} \end{aligned} \tag{2.37}$$

2.9 Materie im Magnetfeld

2.9.1 Magnetismus und elementarer Aufbau

Jede bewegete Ladung erzeugt auch ein Mangetfeld. Somit entstehen durch die Rotation eines Elektrons um einen Atomkern sowie durch den Elektronenspin (Rotation um die eigene Achse) elementare Magnetfelder.

2.9.2 Diamagentismus

Bringt man einen diamagnetischen Werkstoff in ein homogens Feld mit der Flußdichte B_0, so stellt sich eine schwächere Flußdichte $B < B_0$ ein. Die Permiabilität eines diamagnetischen Werkstoffes erfüllt die Bedingung:

$$\mu_r = \frac{B}{B_0} < 0 \tag{2.38}$$

$$B_0 \quad : \quad \text{Flussdichte im Vakuum}$$

[1]

2.9.3 Paramagnetismus

Bringt man einen paramagnetischen Werkstoff in ein homogenes Magnetfeld, das im Vakuum die Flußdichte B_0 aufweist, so stellt sich in diesem Stoff die Flussdichte $B > B_0$ ein:

$$\mu_r = \frac{B}{B_0} > 0 \tag{2.39}$$

2.9.4 Ferromagnetismus

In einem ferromagnetischen Stoff existieren viele kleine Bezirke, sogenannte Weiß'sche Bezirke in denen die magnetischen Momente der Atome durch gegenseitige Wechselwirkungen völlig parallel liegen. Weiß'sche Bezirke sind $0,01$ bis $0,007mm^2$ groß und enthalten 10^6 bis 10^9 Elementarmagneten.

Ferromagnetismus gibt es nur bei bestimmten Kristallstrukturen von festen Körpern. Oberhalb der Curie-Temperatur verschwindet der Ferromagnetismus

[1] ACHTUNG Gl. 40 fehlt!

restlos, da die Wärmebewegung die Ausrichtung aufhebt.

$$\mu = \frac{B}{H} \neq \text{const bei ferromagnetischen Werkstoffen} \tag{2.40}$$

Typisch $\mu_r \approx 100 - 100000$.
Die absolute Permiabilität ist definiert als:

$$\mu = \frac{B}{H} \tag{2.41}$$

In Werkstofftabellen wird anstelle von μ die relative Permiabilität angegeben:

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \tag{2.42}$$

Die differentielle Permiabilität:

$$\mu_{\text{diff}} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{dB}{dH} \tag{2.43}$$

Ferromagnetische Werkstoffe zeigen die Eigenschaft der Hypothese:

B_r : Remanenzflussdichte:
Restflussdichte nachdem der Strom abgeschaltet wurde ($I = 0 \Rightarrow H = 0$)

B_r : Korezitivfeldstärke
Feldstärke, bei der das Magnetfeld im Eisen verschwindet ($B = 0$)

Die Neukurve ergibt sich beim erstmaligen Magnetisierung eines entmagnetisierten Werkstoffes. Er ergibt sich aus der Verbindung der Endpunkte aller möglichen Hystereseschleifen.

Magnetische Werkstoffe werden in zwei Gruppen eingeteilt:

1. Magnetisch weiche Stoffe: H_c klein
   $\Rightarrow$ leicht (ent-) magnetisierbar. z.B. ,,Elektrobleche" in elektrischen Maschinen.

2. Magnetisch feste Werkstoffe: H_c groß
   $\Rightarrow$ schwer (ent-) magnetisierbar z.B. für Dauermagnete

Ferrite: Ferromagnetische Werkstoffe mit sehr niedriger Leitfähigkeit für Hochfrequenz-Anwendungen.

$AlNiCo$-Legierungen bestehen vor allem aus: Aluminium, Nicket und Kobalt plus Eise.

2.10 Energiedichte im Magnetfeld

Ohne Beweis gilt für die Energiedichte im Magnetfeld:

$$w_m = \int_0^{B_i} H \cdot dB \tag{2.44}$$

Die gesamte Energie in einem inhomogenen Feld ist:

$$W_m = \int_V w_m \cdot dV \tag{2.45}$$

$$V : Volumen \tag{2.46}$$

Allgemein: $H(B)$ nicht linear, d.h. $\mu =$ const! Ist die Permiabilität μ konst. so gilt vereinfacht:

$$w_m = \frac{1}{\mu} \cdot \int_0^B B \cdot dB = \frac{B^2}{\mu \cdot 2} \tag{2.47}$$

Bemerkung: Ist die Permiabilität nicht konstant, so muß man die Energiedichte graphisch oder numerisch aus der entspr. Kennlinie ermitteln. (Bild 2-31b)

$$\begin{array}{lll} 1 \to 2 & : & dB > 0 \quad , H > 0 \Rightarrow w_m > 0 \\ 2 \to 1 & : & dB < 0 \quad , H < 0 \Rightarrow w_m < 0 \end{array}$$

Bild 2-32: Bei vollständigem und einmaligen Druchlaufen der Hystereseschleife verbraucht man eine Energie, die der eingeschlossenen Fläche entspricht. Erklärung siehe obigen Gleichungsblock.

2.11 Der magnetische Kreis

2.11.1 Magnetischer Kreis und magnetische Ersatzschaltung

Einfache Kreise mit Eisen

Annahme eines einfachen magnetischen Kreises in Form einer Kreisringspule mit $D >> d$. Daraus folgt, dass man näherungsweise mit der mittleren Magnetischen Feldstärke rechenen kann:

$$\begin{aligned} H &\approx \frac{N \cdot I}{\pi \cdot D} \\ &= \frac{\theta}{\pi \cdot D} \\ &= \frac{\theta}{l} \end{aligned} \tag{2.48}$$

H konstant entlang A und H senkrecht zu H.

$$\begin{aligned} \phi &= B \cdot A \\ &= \mu_r \cdot \mu_0 \cdot H \cdot A \\ &= \frac{\mu_r + \mu_0 \cdot A}{l} = \theta^2 \end{aligned} \tag{2.49}$$

$$\tag{2.50}$$

Definition Λ

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{1}{\theta} \\ &= \frac{\mu_r \cdot \mu_0 \cdot A}{2} \\ &= \frac{1}{R_m} \\ R_m &: \text{Magnetischer Widerstand} \\ \Lambda &: \text{Magnetischer Leitwert} \end{aligned} \tag{2.51}$$

Zum Vergleich Relation:

$$\begin{aligned} R_{el} &= \rho \cdot \frac{l}{A} \\ &= \frac{l}{\kappa \cdot A} \\ G &= \frac{\kappa \cdot A}{l} \end{aligned}$$

Dazu kann geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \theta &= R_m \cdot \phi \\ \updownarrow &= \updownarrow \text{Analogie} \\ U &= R \cdot I \end{aligned} \tag{2.52}$$

Man führt eine Analogie von dem elektrischen Kreis zu magnetisches Ersatzschaltbild ein. Dieses erleichtert die Berechnung des magnetischen Kreises.

$$\begin{aligned} V_{m12} &: \text{Magnetische Spannung zwischen 1 und 2} \\ V_{m12} &: \int_1^2 \vec{H} \cdot d\vec{s} \end{aligned}$$

Dies entspricht:

$$U_{12} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Kreis mit Eisen und Luft

Es wird eine Kreisringspule mit einem Luftspalt angenommen. (Bild 2-32a) Aufgrund der Kontinuitätsbedingung ist der Fluss im Eisen und Luftspalt gleich groß. Vereinfacht wird angenommen, daß das Feld im Eisen und in der Luft homogen ist und dass es keine Streuung gibt.

$$
\begin{aligned}
\phi_{Fe} &= \phi_L \\
&\Rightarrow B_{Fe} \cdot A_{Fe} = B_L \cdot A_L \\
&\Rightarrow B_{Fe} \cdot A = B_L \cdot A \\
&\Rightarrow \mu_{Fe} \cdot \mu_0 \cdot H_{Fe} \cdot A \\
&\quad\ \mu_{r_{Fe}} \cdot \mu_0 \cdot H_{Fe} \cdot A \cdot 1 \cdot \mu_0 \cdot H_L \cdot A \qquad (2.53) \\
\mu_{r_{Fe}} >> 1 &\Rightarrow H_{Fe} = \frac{H_L}{\mu_{r_{Fe}}} \Rightarrow H_{Fe} << H_L \qquad (2.54)
\end{aligned}
$$

Aber: $B_{Fe} = B_L$
Das Durchflutungsgesetz liefert für diesen Kreis:

$$
\begin{aligned}
\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} &= \int_{l_{Fe}} + \int_{L_l} \vec{H} d\vec{s} \\
&= H_{Fe} \cdot l_{Fe} + H_L \cdot l_L = \theta = N \cdot I \qquad (2.55) \\
l_{Fe} &: \text{Mittlere Länge des Eisenwegs} \\
l_L &: \text{Mittlere Länge des Luftwegs}
\end{aligned}
$$

Allgemein gilt im Magnetkreis: Es gilt der Kontenpunktsatz bezüglich der magnetischen Flüsse. Es gilt der Maschensatz bzgl. der Durchflutung (Magnetische Spannungshülle (s. Gl. 2-56). Zusätzlich sind die Materialeigenschaften zu berücksichtigen.

2.11.2 Feldgrößen an Grenzflächen

Tritt ein Magnetfeld durch eine Grenzfläche zwischen zwei Materialien mit verschiedenen Permiabilitäten so gilt für die Feldgrößen:

$$
\begin{aligned}
B_{1n} &= B_{2n} \qquad (2.56) \\
\frac{B_{1t}}{B_{2t}} &= \frac{\mu_1}{\mu_2} \qquad (2.57) \\
H_{1t} &= H_{2t} \qquad (2.58) \\
\frac{H_{1m}}{H_{2m}} &= \frac{\mu_2}{\mu_1} \qquad (2.59) \\
\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} &= \frac{\mu_1}{\mu_2} \qquad (2.60)
\end{aligned}
$$

Aus den Kontinuitätsbedingungen kann man folgen:

1. Aus Stoffen hoher Permiabilität treten die Induktionslinien nahezu senkrecht aus.

2. Die magnetischen Induktionslinien werden durch Stoffe hoher Permiabilität gefühert, so wie Strom durch einen metallischen Leiter geführt wird.

2.11.3 Kräfte auf der Trennfläche

Polfläche: Die Oberfläche eines ferromagnetischen Körpers, durch die ein Magnetfeld in eine nichtferromagnetische Umgebung austritt.

Auf der Polfläche wirkt eine Kraft, die vom ferromagnetischen Material zur nichtferromagnetischen Umgebung gerichtet ist.

Annahmen:

1. Das Magnetfeld tritt senkrecht durch die Polfläche

2. Das Magentfeld ist in der Luft homogen

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{A_L \cdot B_L^2}{2 \cdot \mu_0} \qquad (2.61)\\
B_L &: \text{Magnetische Induktion in der Luft}\\
B_L &: \text{Gesamte Polfläche}\\
R_m &= \frac{1}{\mu} \cdot \frac{l}{A}\\
\theta &= \phi \cdot R_m \hat{=} U = R \cdot I
\end{aligned}
$$

2.11.4 Anwendungen

- Relais: Bild (2-40)
- Sch—ütz: Bild (2-44)
- Lautsprecher: Bild (2-45)

¿¿¿¿¿¿¿ 1.6

Kapitel 3

Zeitabhängige magentische Felder

3.1 Indunktionsgesetz und LENTZsche Regel

Es wird eine Anordnung gemäß Bild (3-1) betrachtet. Der Magnet mit seinem inhomogenen Feld bewegt sich in Richtung der Leiterschleife. Auf die Zunahme des magnetischen Flusses reagiert die Schleife mit einem Strom, der der Flussänderung entgegenwirkt.

Lentzsche Regel: Ein Induzierter Strom fließt stets so, dass sein Magnetfeld der induzierenden Feldänderung entgegewirkt.

Induktionsgesetz: (1. Maxwellsche Gleichung)

$$\begin{aligned} u_i &= \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \frac{-\psi}{dt} \qquad (3.1) \\ u_i &: \text{Induzierte Spannung} \\ E_i &: \text{Elektrische Feldstärke} \\ \psi &: \text{Verkettungsfluss} \end{aligned}$$

Bei Gleichung 3.1 ist zu Beachten:
Der Flächenvektor $d\vec{A}$ ist mit dem aus den Elementen $s\vec{s}$ zusammengesetzten Weg s rechtssinnig verknüpft.

Bild 3-2 : Selbst in einem isolierten Medium wird bei einer Flussänderung ein elektrisches Feld bzw. eine Spannung induziert, in diesem Fall kann aber kein induzierter Strom fließen. Nur bei Vorhandensein einer elektrischen Leitfähigkeit κ kann es zu einem Strom kommen.

Gehen durch die verschiedenen Windungen einer Spule unterschiedliche Flüsse, so ergibt sich der gesamte mit der Anordnung verkettete Fluss zu:

$$\begin{aligned} \psi &= \sum_{k=1}^{N} \phi_k \qquad (3.2) \\ \phi &: \text{Elektrischer Fluss innerhalb Windung } k \\ \psi &: \text{Verkettungsfluss} \end{aligned}$$

Geht der selbe Fluss durch alle N Windungen, so gilt:

$$\psi = N \cdot \phi \tag{3.3}$$

Regel zum Induktionsgesetz bezüglich der Richung der induzierten Spannung: Ausgehend von der Richtung des Flusses ψ_T wird die induzierte Klemmenspannung $u_i(t)$ rechtssinnig[1] um den Fluss angesetzt. Dann gilt:

$$u_i = +u_{12} = -\frac{d\psi}{dt} \tag{3.4}$$

Man definiert:

$$\begin{aligned} u_L &= -u_i = \text{Induzierte Spannung} \\ u_L &= u_{21} = +\frac{d\psi}{dt} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Übung 3-1

3.2 Selbstinduzierte Spannung

Fließt durch eine Spule ein Strom, so erzeugt er ein Magnetfeld und diese induziert in der Spule eine Spannung (Voraussetzung für Wechelstrom). Man spricht von der Selbstinduktion (Bild 3-5). Unabhängig vom Wickelsinn wird der Bezugspfeil der induzierten Spannung U_L parallel zum Bezugspfeil des Stromes I angenommen. Und es gilt:

$$U_L = N \cdot \frac{d\phi}{dt} \tag{3.6}$$

Daher kann man, ohne den Winkelsinn zu kennen, vom Bild 3-6 ausgehen. Bei gleichem Fluss durch alle N Windungen einer Spule gilt dann:

$$U_L = N \cdot \frac{d\phi}{dt} \tag{3.7}$$

Übung 3-3

Übung 3-4

3.3 Bewegungsspannung

Annahme: Ein gerader Leiter der Länge l bewegt sich mit einer konstanten Geschwindikeit v in einem homogenen Magnetfeld $\vec{B}$. Für die induktive Spannung

[1] Also nach der „Rechte-Hand-Regel" mit Daumen=Fluss (ψ)

gilt:

$$\begin{aligned} U_L &= \vec{B} \cdot (\vec{v} \times \vec{l}) && (3.8) \\ \vec{v} &: \text{Geschwindigkeit des Leiters} \end{aligned}$$

Vereinfachung:

- $\vec{v} \perp \vec{l}$
- $\vec{B} \perp \vec{u}$ und $\vec{B} \perp \vec{l}$

$\Rightarrow \vec{B}||(\vec{u} \times \vec{l})$

$$\Rightarrow U_L = B \cdot v \cdot l \tag{3.9}$$

Die Gleichung 3.8 kann auch mithilde der Lorentzkraft auf im Magnetfeld bewegte Ladungen herleiten[2]:

$$F = Q \cdot (\vec{u} \times \vec{B}) \tag{3.10}$$

3.4 Erzeugung einer Sinusspannung

Annahme: Eine Leiterschleife mit N Windungen rotiert mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω in einem homogenen und zeitlich konstanten Magnetfeld B

Über die Schleifkontakte misst man die induzierte Spannung. Zur Zeit $t = 0$ soll die Wicklung den Winkel von $\phi(0)$ gegenüber der Horizontalen haben.

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \vec{B} \cdot \vec{A} = |\vec{B}| \cdot |\vec{A}| \cdot \cos\alpha(t) && (3.11) \\ \alpha(t) &= \omega \cdot t + \phi_0 && (3.12) \\ U_L &= N \cdot \frac{d\phi}{dt} = N \cdot B \cdot A \cdot (-\sin(\omega \cdot t + \phi_0)) \cdot \omega \\ &= N \cdot B \cdot A \cdot \omega \cdot \cos\left(\omega \cdot t + \phi_0 + \frac{\pi}{2}\right) && (3.13) \end{aligned}$$

Bild 3-8: Für $\phi_0 = 0$!

Die induzierte Spannung ist sinusförmig und um 90^o gegenüber dem Fluss phasenverschoben. Ihre Frequenz entspricht der Freqenz der Drehbewegung. Ihr Betrag hängt ab von $N, B, A,$ und ω

[2] WTF? Hier fehlt etwas!

3.5 Selbstinduktivität

Durch eine Schleife wird ein Wechselstrom I geschickt: Dieser erzeugt eine induktive Spannung und einen Ohm'schen Spannungsfall entlang der Schleife:

$$\begin{aligned} u &= R \cdot i + U_l \\ &= R \cdot i + \frac{d\psi_m(i)}{dt} \end{aligned} \tag{3.14}$$

Wegen der Selbstinduktion kann sich der Strom in einem elektrischen Kreis niemals sprunghaft ändern, da sonst unendliche Spannung induziert werden würde.

Definition:

$$\psi_m = L \cdot i \tag{3.15}$$

L : Selbstinduktivität (abhängig von Geometrie und Materialeigenschaften)

$$\Rightarrow U_L = L \cdot \frac{di}{dt} \tag{3.16}$$

Zu beachten ist: Der Zusammenhang zwischen Fluss und Strom ist im allgemeinen nicht linear:

1. Bei para- und diamagnetischen Werkstoffen gilt

$$L \approx \text{konst. bzw } \mu \approx \text{konst}$$

2. Bei ferromagnetischen Werkstoffen gilt im Allgmeinen:

$$L \neq \text{konst. bzw } \mu = \text{konst}$$

Für eine Spule mit N Windungen gilt :

$$L = \frac{N \cdot \phi}{i} \tag{3.17}$$

In einem magnetischen Kreis gilt somit:

$$\begin{aligned} L &= \frac{N \cdot \phi}{i} \\ &= N \cdot \frac{\theta \cdot \Lambda}{i} \\ &= N \cdot \theta \cdot \frac{N \cdot i \cdot \Lambda}{i} \\ &= N^2 \cdot \Lambda \end{aligned} \tag{3.18}$$

Man definiert folgende Induktivitäten:

Gleichstrominduktivität:

$$L_0 = \frac{\psi_0}{I_0} \tag{3.19}$$

Differentielle Induktivität:

$$L_d = \frac{d\psi_0}{dI_0}|_0 = \frac{\Delta\psi_0}{\Delta I_0} \tag{3.20}$$

3.6 Induktivität von praktischen Anwendungen

Berechnung der Induktivität einer Leiteranordnunge

Der mit der Leiteranordnung insgesamt verkettete Fluss wird ermittelt und durch den ihn erzeugenden Strom dividiert.

Es gibt zwei Arten von Induktivitäten:

1. Die äußere Induktivität (L_a):
   Sie ist die Induktivität aufgrund des Flusses im Feldraum außerhalb der Leiters.

2. Die innere Induktivität (L_i):
   Es ist die Induktivität aufgrund des Flusses im Inneren des Leiters. Diese Flussanteil ist nicht mit dem gesamten Strom verkettet und daher komplizierter zu berechnen.

Die Gesamtinduktivität ergibt sich zu:

$$L = L_i + L_a \tag{3.21}$$

Kreisringspule

Vereinfachende Annahmen: Alle Windungen mit demselben Fluss verkettet. Der mittlere Spulendurchmesser D ist groß gegen den Windungsdurchmesser. $\mu =$ konst. Vernachlässigung der inneren Induktivität. Aus Gleichung (2-33):

$$H \approx \frac{N \cdot I}{\pi \cdot D} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned} \psi &= N \cdot \phi \\ &= N \cdot B \cdot A \end{aligned} \tag{3.23}$$

Zylinderspule

Analoge vereinfachende Annahmen führen zu:

$$\begin{aligned} L_a &= \frac{\psi}{I} \\ &= N^2 \cdot \mu \cdot \frac{A}{l} \end{aligned} \tag{3.24}$$

Doppelleiter

$$x_l - \frac{U_l}{i} = \omega \cdot L$$

$$L_a = \frac{\psi}{I} = \frac{\mu \cdot l}{\pi} \cdot \ln \frac{a - r_l}{r_l} \tag{3.25}$$

$$L_i = \frac{\psi}{I} = \frac{\mu \cdot l}{8\pi} \tag{3.26}$$

$$L = L_a + L_{i1} + L_{i2} = \frac{\mu \cdot l}{\pi} \cdot \left(\ln \frac{a - r_l}{r_l} + 0\,25\right) \tag{3.27}$$

3.7 Zusammenschaltung von Induktivitäten

Für eine konstate Selbstinduktivität gilt (Vgl. Bild 3-12):

$$u = L \cdot \frac{di}{dt} \tag{3.28}$$

Die folgenden Überlegungen gelten nur unter der Voraussetzung, dass das Magnetfeld einer Spule die evtl. vorhandenen anderen Spulen nicht durchsetzt.

Für eine Reihenschaltung gilt:

$$L_e = \sum_{i=1}^{n} L_i \tag{3.29}$$

Für eine Parallelschaltung gilt:

$$\frac{1}{L_e} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + ... + \frac{1}{L_n} \tag{3.30}$$

$$L_e = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{L_i}} \tag{3.31}$$

3.8 Gegeninduktion und Gegeninduktivität

Es werden zwei magnetisch gekoppelte Spulen betrachtet, d.h. das Magentfeld einer Spule durchsetzt auch teilweise die andere Spule und induziert somit in ihr eine Spannung. Man spricht von der magnetischen Kopplung und der gegenseitigen Induktion. (Engl.: Mutual Inductance M)

Annahme: Strom nur durch Spule 1

ψ_{11} : Fluss in der Spule 1, erzeugt in 1

ψ_{12} : Fluss in der Spule 1, erzeugt in 2

$$u_1 = i_1 \cdot R_1 + \frac{d\phi_{11}}{dt} \tag{3.32}$$
$$u_2 = \frac{d\psi_{21}}{dt} \tag{3.33}$$

ψ_1 : Gesamter Fluss in der Spule 1

ψ_2 : Gesamter Fluss in der Spule 2

$$u_1 = i_1 \cdot R_1 + \frac{d\psi}{dt} \tag{3.34}$$
$$u_2 = i_2 \cdot R_2 + \frac{d\psi}{dt} \tag{3.35}$$
$$\psi_1 = \psi_{11} + \psi_{12} \tag{3.36}$$
$$\psi_2 = \psi_{21} + \psi_{22} \tag{3.37}$$

Definition der Gegeninduktivitäten:

$$L_{12} = \frac{\psi_{12}}{i_2} \tag{3.38}$$
$$L_{21} = \frac{\psi_{21}}{i} \tag{3.39}$$

Selbstinduktivitäten:

$$L_1 = \frac{\psi_{11}}{i_1} \tag{3.40}$$
$$L_2 = \frac{\psi_{22}}{i_2} \tag{3.41}$$

Es gilt allgemein der Zusammenhang bei konstantem μ:

$$L_{12} = L_{21} \tag{3.42}$$

Während die Selbstinduktion immer positiv ist, kann die Gegeninduktivität positiv oder negativ sein (Bilder 3-16 und 3-16a) gleichsinnige Kopplung: ψ_1 und ψ_2 gleich gerichtet:

$$L_{21} = \frac{\psi_{21}}{i_1} > 0 \tag{3.43}$$
$$L_{12} = \frac{\psi_{21}}{i_2} > 0 \tag{3.44}$$

Bild 3-16a: gegensinnige Kopplung: (ψ_1 und ψ_2 sind entgegengesetzt gerichtet)

$$L_{21} = \frac{\psi_{21}}{i_1} \tag{3.45}$$
$$L_{12} = \frac{\psi_{21}}{i_2} \tag{3.46}$$

NICHT LESBAR!!!

$$\psi_1 = L_1 \cdot i_1 + L_{12} \cdot i_2 \tag{3.47}$$
$$\psi_2 = L_{21} \cdot i_1 + L_2 \cdot i_2 \tag{3.48}$$

Klemmspannung:

$$u_1 = i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \tag{3.49}$$
$$u_2 = i_2 R_1 + L_2 \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \tag{3.50}$$

Für die Reihenschaltung von zwei gekoppelten Spulen gilt (Bilder 3-18, 3-19):

$$u = i\,(R_1 + R_2) + (L_1 + L_2)\,\frac{di}{dt} + L_{12}\frac{di}{dt} + L_{21}\frac{di}{dt} \tag{3.51}$$

Wegen $L_{12} = L_{21}$ folgt:

$$u = i\,(R_1 + R_2) + \left(\underbrace{L_1 + L_2 + 2 \cdot L_{12}}_{L_e}\right)\frac{di}{dt} \tag{3.52}$$

$$\tag{3.53}$$

Ersatzinduktivität:

$$L_e = L_1 + L_2 + 2 \cdot L_{12} \tag{3.54}$$

Bei gleichsinniger Kopplung (Bild 3-18):

$$L_{12} > 0 \;\;\Rightarrow\;\; L_e > L_1 + L_2 \tag{3.55}$$

Bei gegensinniger Kopplung (Bild 3-19):

$$L_{12} < 0 \;\;\Rightarrow\;\; L_e < L_1 + L_2 \tag{3.56}$$

Kapitel 4

Dreh- und Wechselstromtechnik

4.1 Komplexe Zahlen

Eine komplexe Zahl besteht aus zwei Zahlen, von denen eine als Realteil und die andere als Imaginärteil bezeichnet wird:

$$\underline{z} = (x, y) \tag{4.1}$$
$$\underline{z} = x + j \cdot y \tag{4.2}$$
$$Re(\underline{z}) = x \text{ Realteil} \tag{4.3}$$
$$Im(\underline{z}) = y \text{ Imaginärteil} \tag{4.4}$$
$$j : \text{Imaginäre Einheit}$$

Definition:

$$j^2 = -1 \quad \text{bzw.} \quad j = \sqrt{-1} \tag{4.5}$$
$$\tag{4.6}$$

Eine komplexe Zahl kann man in der Komplexen Ebene durch einen Zeiger darstellen, siehe Bild (4-1). Mathematisch gibt es folgende Darstellungsformen:

- Kartesische Form: x, y
- Polarform: $|z| = z$ oder r, ϕ

$$\begin{aligned} \underline{z} &= x + j \cdot i \\ &= r \cdot \cos\phi + j \cdot r \cdot \sin\phi \\ &= r\,(\cos\phi + j \cdot \sin\phi) \\ &= r^{\cdot j\phi} \end{aligned} \tag{4.7}$$

- Eulersche Form:

$$e^{j \cdot \phi} = \cos\phi + j \cdot \sin\phi \tag{4.8}$$

Betrag:

$$|\underline{z}| = z = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{4.9}$$

Polarform:

$$r = \text{UNLESBAR}\sqrt{x^2 + y^2} \tag{4.10}$$

$$\tan\phi = \frac{y}{x} \tag{4.11}$$

Bei der Berechnung des Winkels ϕ ist die Lage in den vier Quadranten zu berücksichtigen:

$$\begin{aligned}
\phi = \arctan\frac{y}{x} + 2\pi &\quad \text{falls} \quad x > 0; y < 0\\
\phi = \arctan\frac{y}{x} &\quad \text{falls} \quad x > 0; y \geq 0\\
\phi = 2\pi &\quad \text{falls} \quad x = 0; y > 0\\
\phi = 0 &\quad \text{falls} \quad x = 0; y = 0\\
\phi = \arctan\frac{y}{x} + \pi &\quad \text{falls} \quad x < 0\\
\phi = \frac{3\pi}{2} &\quad \text{falls} \quad x = 0; y < 0
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Index

Kondensator
  Ladestrom (I_C), 2
  Ladung
    -Anderung (dQ), 2
    Definition (Q), 1
  Verschiebungsstrom
    -Knotensatz, 4
    -dichte ($\vec{s_v}$), 3

Vektor
  Rechtssystem, iii
  Skalarprodukt, iii
  Vektorprodukt, iii